第三章

- p191，Q4.1

使用生成函數來解遞迴關係式：

$$a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1},\ \ a_1 = 9$$

Ans：

令 $A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 爲無窮數列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ 的生成函數．由題目可知 $a_n - 8a_{n-1} = 10^{n-1}$ 且 $a_1 = 9$，所以由 $a_1 = 8a_0 + 10^0$，故可得 $a_0 = 1$.
引入生成函數可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - 8\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{n-1} x^n$$

更正： 也就是 $A(x) - 1 - 8xA(x) = \dfrac{x}{1-10x}$.進而所以可得

$$A(x) - 8xA(x) = \frac{x}{1-10x} + 1$$

移項後可得,

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{1-9x}{(1-10x)(1-8x)} \\ &= \frac{1/2}{1-10x} + \frac{1/2}{1-8x} \end{aligned}$$

因爲 $A(x)$ 中 x^n 的係數即爲所求，所以得到解答爲

$$a_n = \frac{1}{2}(10^n) + \frac{1}{2}(8^n),\ \ n \geq 0$$